冬期講習　標準大　理系数学

目　　次

第１講　積分 —— p.2
第２講　極限 —— p.3
第３講　微分と増減 —— p.4
第４講　回転体の体積 —— p.5
第５講　共有点と面積，体積 —— p.6
第６講　複素数平面 —— p.7

第１講　積分

1 ［A］ 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

［B］ 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,dx$

［C］ 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\,dx$

第２講　極限

2 ［A］　次の極限を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{x\sin x}$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$

［B］　次の各問いに答えよ．

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(2)　$y=e^{2x}$ の $x=a_n$ における接線と x 軸の交点の x 座標を a_{n+1} とする．$a_1=1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ．

第３講　微分と増減

3 ［A］ $f(x)=\dfrac{6x+16}{x^2+4}$ の最大値と最小値を求めよ．

［B］ $y=\dfrac{x^2}{e^{2x}}$ のグラフを描け．ただし，必要であれば $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-2x}=0$ を用いてもよい．

［C］ x の方程式 $x^2-3x-k\sqrt{x}=0$ $(x\geqq 0)$ の異なる実数解の個数が最大となるとき，k の値の範囲を求めよ．

第４講　回転体の体積

4　［A］ $f(x)=e^{-\frac{x^2}{8}}$ に対して $C:y=f(x)$ $(x\geqq 0)$ とする．第１象限の C の変曲点を P とし，P における C の接線を l，l と y 軸との交点を Q とする．また線分 PQ と C と y 軸によって囲まれた部分を D とする．

D を y 軸まわりに回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

［B］ $(x,\ y)=(\cos^3\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で定められる曲線を C とする．

C と x 軸と y 軸で囲まれる部分を x 軸まわりに回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ．

第５講　共有点と面積，体積

5　k を正の定数として，$C_1: y=\sin 2x\ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$，$C_2: y=k\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とする．C_1 と C_2 が $0<x<\frac{\pi}{2}$ に共有点をもつとする．

次の各問いに答えよ．

(1)　k の値の範囲を求めよ．

(2)　C_1 と C_2 の $0<x<\frac{\pi}{2}$ における共有点の x 座標を α として，k と α の関係式を求めよ．

(3)　C_1 と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を S_2 として，$S_2=\frac{1}{4}S_1$ となるときの k を求めよ．

(4)　k が(3)の値をとるとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分を x 軸まわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

第６講　複素数平面

6 ［A］ 方程式 $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を解け.

［B］ $\mathrm{A}(i)$, $\mathrm{B}(2)$ とする．第１象限の３点 $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$, R に対して，三角形 ABP は正三角形，四角形 ABQR は正方形であるという．z と w の求めよ.

［C］ $z_0=3$, $z_{n+1}=(1+i)z_n-2i$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる $\{z_n\}$ に対して，z_n が純虚数となる自然数 n を求めよ.

テキスト解答

第１講　積分

1　［A］　次の定積分を計算せよ．

（1）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$

（2）$\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx$

（3）$\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

［B］　次の定積分を計算せよ．

（1）$\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx$

（2）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

（3）$\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,dx$

［C］　次の定積分を計算せよ．

（1）$\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$

（2）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$

（3）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

（4）$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\,dx$

【答】［A］（1）$\dfrac{\pi-2}{8}$　（2）$\dfrac{e^2+1}{4}$　（3）$\dfrac{e^2+1}{4}$

［B］（1）$\dfrac{6\sqrt{3}+1}{15}$　（2）$\dfrac{2}{15}$　（3）$\dfrac{1}{2}$

［C］（1）$\dfrac{\pi}{8}$　（2）$\dfrac{1}{4}\log 3$　（3）$\dfrac{\pi}{6}$　（4）$\dfrac{1}{2}\log\dfrac{5}{4}$

【解説】［A］（1）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx=\left[x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi-2}{8}$$

（2）$\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx=\left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx=\left[\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1=\left[\frac{2x-1}{4}e^{2x}\right]_0^1=\frac{e^2+1}{4}$

（3）$\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\cdot\log x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\cdot\log x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x\,dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=\left[\frac{x^2}{4}(2\log x-1)\right]_1^e=\frac{e^2+1}{4}$$

［B］（1）$2x+1=t$ と置換すると，

$$\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx=\int_1^3\frac{t-1}{2}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\int_1^3\frac{t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}}{4}dt=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\right]_1^3$$

$$=\left[\frac{t\sqrt{t}}{30}(3t-5)\right]_1^3=\frac{6\sqrt{3}+1}{15}$$

(2)　$\cos x=t$ と置換すると，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^2 x\,dx=\int_1^0(1-t^2)t^2(-dt)=\int_0^1(-t^4+t^2)dt=\left[-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{15}$$

(3)　$x^2=t$ と置換すると，

$$\int_0^1 x^3e^{x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}te^t\,dt=\left[\frac{1}{2}te^t\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^t\,dt=\left[\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{2}e^t\right]_0^1=\left[\frac{1}{2}(t-1)e^t\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

［C］ (1)　$x=2\tan\theta$ と置換すると，

$$\int_0^2\frac{1}{4+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4+4\tan^2\theta}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$$

(2)　$$\int_0^1\frac{1}{4-x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right)dx=\left[\frac{\log|2+x|-\log|2-x|}{4}\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right]_0^1=\frac{1}{4}\log 3$$

(3)　$x=2\sin\theta$ と置換すると，

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

(4)　$$\int_0^1\frac{x}{4+x^2}dx=\left[\frac{1}{2}\log(4+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\log\frac{5}{4}$$

第２講　極限

[2] ［A］ 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x\sin x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$

［B］ 次の各問いに答えよ．

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(2) $y=e^{2x}$ の $x=a_n$ における接線と x 軸の交点の x 座標を a_{n+1} とする．$a_1=1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ．

【答】 ［A］ (1) $\frac{1}{2}$　(2) ∞　(3) 2　(4) 1　(5) ∞

［B］ (1) 2　(2) $-\frac{1}{2}$

【解説】 ［A］ (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3+x^2+1}{(x-1)(2x^2+2x+1)}=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{\frac{\tan x}{x}}=2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-1)=\infty$

［B］ (1) $a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ より 2 以上の n に対して

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ となるので

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = 2$$

(2)　$y=e^{2x}$ より $y'=2e^{2x}$ であるから $x=a_n$ における接線は $y=2e^{2a_n}(x-a_n)+e^{2a_n}$ となる.

これが $(a_{n+1},\ 0)$ を通るので $0=2e^{2a_n}(a_{n+1}-a_n)+e^{2a_n}$ つまり $a_{n+1}-a_n=-\dfrac{1}{2}$ を得る.

これと $a_1=1$ より $a_n=a_1+(n-1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}n+\dfrac{3}{2}$ となるので,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2n}\right)=-\frac{1}{2}$$

第３講　微分と増減

③ ［A］ $f(x)=\dfrac{6x+16}{x^2+4}$ の最大値と最小値を求めよ．

［B］ $y=\dfrac{x^2}{e^{2x}}$ のグラフを描け．ただし，必要であれば $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-2x}=0$ を用いてもよい．

［C］ x の方程式 $x^2-3x-k\sqrt{x}=0$ $(x\geqq 0)$ の異なる実数解の個数が最大となるとき，k の値の範囲を求めよ．

【答】 ［A］ 最大値 $\dfrac{9}{2}$，最小値 $-\dfrac{1}{2}$　［B］ 略　［C］ $-2<k\leqq 0$

【解説】 ［A］ $f'(x)=\dfrac{(6x+16)'(x^2+4)-(6x+16)(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}=-\dfrac{2(3x-2)(x+6)}{(x^2+4)^2}$ より

$f(x)$の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	-6	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{9}{2}$	↘	0

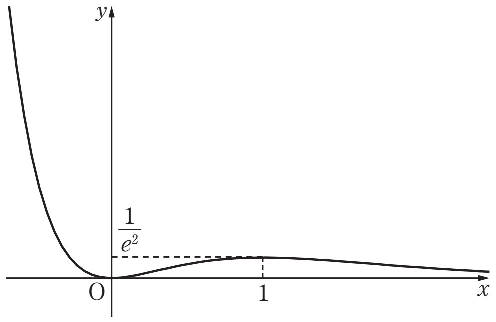
となるので，最大値は $\dfrac{9}{2}\left(x=\dfrac{2}{3}\right)$，最小値は $-\dfrac{1}{2}$ $(x=-6)$．

［B］ $y=x^2e^{-2x}$ より $y'=(x^2)'e^{-2x}+x^2(e^{-2x})'=2xe^{-2x}+x^2(-2e^{-2x})=2x(1-x)e^{-2x}$

となるので，y の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	∞	↘	0	↗	$\dfrac{1}{e^2}$	↘	0

となるので，グラフは右図．



［C］ $x=0$ は $x^2-3x-k\sqrt{x}=0$ の解である．

$x\neq 0$ のとき $x^2-3x-k\sqrt{x}=0$ は $x^2-3x=k\sqrt{x}$ つまり $x\sqrt{x}-3\sqrt{x}=k$ と変形できるので，$f(x)=x\sqrt{x}-3\sqrt{x}$ とおいて $y=f(x)$ と $x=k$ の共有点の x 座標を考える．

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}$ より $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-3\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$ となるので，$f(x)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	-2	$\nearrow$	∞

となる．

　このことと $x=0$ を解にもつことより，$x^2-3x-k\sqrt{x}=0$ の異なる実数解の個数の最大値は 2 であり，このとき $-2<k\leqq 0$ である．

第４講　回転体の体積

$\boxed{4}$ ［A］ $f(x)=e^{-\frac{x^2}{8}}$ に対して $C:y=f(x)$ $(x\geqq 0)$ とする．第１象限の C の変曲点をPとし，Pにおける C の接線を l，l と y 軸との交点をQとする．また線分PQと C と y 軸によって囲まれた部分を D とする．

D を y 軸まわりに回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

［B］ $(x,\ y)=(\cos^3\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で定められる曲線を C とする．

C と x 軸と y 軸で囲まれる部分を x 軸まわりに回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ．

【答】 ［A］ $V_1=8\pi\left(\dfrac{5}{3\sqrt{e}}-1\right)$　　［B］ $V_2=\dfrac{2}{5}\pi$

【解説】 ［A］ $f(x)=e^{-\frac{x^2}{8}}$ より $f'(x)=e^{-\frac{x^2}{8}}\left(-\dfrac{x^2}{8}\right)'=-\dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x^2}{8}}$ となる．

また $f''(x)=-\dfrac{1}{4}\left\{(x)'e^{-\frac{x^2}{8}}+x\left(e^{-\frac{x^2}{8}}\right)'\right\}=-\dfrac{1}{4}\left\{1\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}+x\left(-\dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x^2}{8}}\right)\right\}=\dfrac{1}{16}(x^2-4)e^{-\frac{x^2}{8}}$

となり，$x\geqq 0$ の範囲で $x=2$ を境に $f''(x)$ の符号は負から正に変化するので，変曲点の x 座標は2．よって $\mathrm{P}\left(2,\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ である．

また $f'(2)=-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ より l の方程式は $y=-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}(x-2)+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ つまり

$y=-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}x+\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ となる．

よって

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 2^2\pi\times\frac{1}{\sqrt{e}}\times\frac{1}{3}-\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1}\pi x^2dy \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{e}}-\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1}\pi(-8\log y)dy \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{e}}+8\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1}\log y\,dy \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{e}}+8\pi\Big[y\log y-y\Big]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1} \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{e}}+8\pi\left(-1+\frac{3}{2\sqrt{e}}\right)=8\pi\left(\frac{5}{3\sqrt{e}}-1\right)
\end{aligned}
$$

［B］ $x=\cos^3\theta$ より $\dfrac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta(-\sin\theta)$ なので $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dx}{d\theta}<0$ であり，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y=\sin\theta>0$ なので

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^1 \pi y^2\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \pi(\sin\theta)^2 \cdot 3\cos^2\theta(-\sin\theta)\,d\theta \\ &= 3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta \end{aligned}$$

ここで1［B］(2)の結果より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{2}{15}$ なので $V_2=3\pi\times\dfrac{2}{15}=\dfrac{2}{5}\pi.$

第５講　共有点と面積，体積

5　k を正の定数として，$C_1: y=\sin 2x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_2: y=k\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．C_1 と C_2 が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ に共有点をもつとする．

次の各問いに答えよ．

(1)　k の値の範囲を求めよ．

(2)　C_1 と C_2 の $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における共有点の x 座標を α として，k と α の関係式を求めよ．

(3)　C_1 と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を S_2 として，$S_2=\dfrac{1}{4}S_1$ となるときの k を求めよ．

(4)　k が(3)の値をとるとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分を x 軸まわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

【答】　(1)　$0<k<2$　　(2)　$\sin\alpha=\dfrac{k}{2}$　　(3)　$k=1$　　(4)　$\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\pi$

【解説】　(1)　$\sin 2x=k\cos x$ より $(2\sin x-k)\cos x=0$ なので $\cos x=0$ または $\sin x=\dfrac{k}{2}$．
$\cos x=0$ より $x=\dfrac{\pi}{2}$ なので，C_1 と C_2 が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ に共有点をもつ条件は $0<\dfrac{k}{2}<1$ つまり $0<k<2$．

(2)　(1)より $\sin x=\dfrac{k}{2}$ の解が α なので $\sin\alpha=\dfrac{k}{2}$．

(3)　C_1 と x 軸で囲まれる部分の面積が S_1 より

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1 \end{aligned}$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が S_2 より

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x-k\cos x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x-k\sin x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}-k+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+k\sin\alpha \end{aligned}$$

ここで $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\left(\dfrac{k}{2}\right)^2=1-\dfrac{1}{2}k^2$，$\sin\alpha=\dfrac{k}{2}$ より

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}-k+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)+k\cdot\frac{k}{2} \\ &= \frac{1}{4}k^2-k+1 \end{aligned}$$

となるので，$S_2=\dfrac{1}{4}S_1$ より $\dfrac{1}{4}k^2-k+1=\dfrac{1}{4}\cdot 1 \iff (k-3)(k-1)=0$

これと(1)の結果より $k=1$.

(4)　$k=1$ より $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ なので $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ である．このとき

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\pi(\sin 2x)^2\,dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\pi(\cos x)^2\,dx\\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 2x-\cos^2 x)\,dx\\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos 4x+\cos 2x}{2}\right)dx\\
&= \pi\left[-\frac{\sin 4x+2\sin 2x}{8}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \pi\times\frac{\sin\frac{2}{3}\pi+2\sin\frac{\pi}{3}}{8}\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{16}\pi
\end{aligned}$$

第６講　複素数平面

6 ［A］ 方程式 $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を解け．

［B］ A(i)，B(2) とする．第１象限の３点 P(z)，Q(w)，R に対して，三角形 ABP は正三角形，四角形 ABQR は正方形であるという．z と w の求めよ．

［C］ $z_0=3$，$z_{n+1}=(1+i)z_n-2i$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる $\{z_n\}$ に対して，z_n が純虚数となる自然数 n を求めよ．

【答】 ［A］ $\pm\left(\sqrt{3}+i\right)$，$\pm\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)$　［B］ $z=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(1+2\sqrt{3}\right)i}{2}$，$w=3+2i$　［C］ 3

【解説】 ［A］ $z\neq0$ より，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ と表せる．このとき

$z^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$ であり $-8+8\sqrt{3}\,i=16\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$ なので

$r^4=16$ かつ $4\theta=\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$　$\therefore$ $r=2$ かつ $\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k}{2}\pi$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

よって $z=\pm\left(\sqrt{3}+i\right)$，$\pm\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)$．

［B］ 三角形 ABP は正三角形なので

$$\frac{z-i}{2-i}=1\times\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\iff z=\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\times i+\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\times2$$

$$\therefore\quad z=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(1+2\sqrt{3}\right)i}{2}$$

また，四角形 ABQR は正方形なので

$$\frac{w-i}{2-i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\iff w=(-i)\times i+(1+i)\times2$$

$$\therefore\quad w=3+2i$$

［C］ $z_0=3$，$z_{n+1}=(1+i)z_n-2i\iff z_{n+1}-2=(1+i)(z_n-2)$ より

$z_n-2=(z_0-2)(1+i)^n$ となるので，$z_0=3$ より $z_n-2=(3-2)(1+i)^n$ つまり

$z_n=2+(1+i)^n$．

ここで，$(1+i)^n=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{n}{4}\pi+i\sin\dfrac{n}{4}\pi\right)$ より

$$z_n=2+\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n}{4}\pi+\left\{\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{n}{4}\pi\right\}i$$

となるので，z_n が純虚数となる条件は

$$2+\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n}{4}\pi=0\quad\cdots①\quad かつ\quad\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{n}{4}\pi\neq0\quad\cdots②$$

①より $\cos\dfrac{n}{4}\pi=-\dfrac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$ なので $\cos\dfrac{n}{4}\pi<0$ であり，②より $\sin\dfrac{n}{4}\pi\neq0$ なので，これらを満たす自然数は $n=3,\ 5,\ 11,\ 13,\ 19,\ 21,\ \cdots$ である．

このとき $\cos\dfrac{n}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるが，$n=5,\ 11,\ 13,\ 19,\ 21,\ \cdots$ のとき

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<-\dfrac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^n}<0$ なので，①を満たさない.

　また $n=3$ は①と②を満たすことより，求める n は $n=3$.

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。